Нестандардне примене генеративних функција

Задатак 1. *За мултискуп A, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, чији су елементи природни бројеви, дефинишимо*

$$A^* = \{a_i + a_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Ако за два различита n-елементна мултискупа A и B важи $A^* = B^*$, доказати да је n степен броја 2.

Решење. Означимо $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Дефинишимо следећа два полинома: $P(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$, $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}$. Можемо извести следећи рачун:

$$\begin{aligned} P(x)^2 - Q(x)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \cancel{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{a_i + a_j}} - \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2 \cancel{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x^{b_i + b_j}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} - \sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} = P(x^2) - Q(x^2) \end{aligned}$$

(потирање у првом реду имамо на основу једнакости $A^* = B^*$). Даље, израз на левој страни можемо раставити на чиниоце као $(P(x) - Q(x))(P(x) + Q(x))$, па из тога свега добијамо једнакост

$$P(x) + Q(x) = \frac{P(x^2) - Q(x^2)}{P(x) - Q(x)}.$$

Означимо $S(x) = P(x) - Q(x)$. Нека је вредност 1 нула вишеструкости k у полиному $S(x)$ (могуће $k = 0$); другим речима, можемо записати $S(x) = (x-1)^k S'(x)$, при чему важи $S'(1) \neq 0$. Сада имамо:

$$P(x) + Q(x) = \frac{S(x^2)}{S(x)} = \frac{(x^2-1)^k S'(x^2)}{(x-1)^k S'(x)} = \frac{\cancel{(x-1)^k}(x+1)^k S'(x^2)}{\cancel{(x-1)^k} S'(x)}.$$

Уврштавајући $x = 1$ у последњу једнакост добијамо

$$P(1) + Q(1) = \frac{2^k S'(1)}{S'(1)} = 2^k.$$

Међутим, из дефиниције полинома P и Q видимо да важи $P(1) = Q(1) = n$, па се претходна једнакост своди на $2n = 2^k$, тј. $n = 2^{k-1}$, што је и требало доказати. □

Задатак 2. *Дат је коначан скуп природних бројева S_0. Дефинишимо низ скупова $S_1, S_2, S_3 \ldots$ на следећи начин:*

$a \in S_n$ ако и само ако тачно један од бројева $a, a-1$ припада скупу S_{n-1}.

Доказати да постоји бесконачно много природних бројева N таквих да важи

$$S_N = S_0 \cup \{a + N : a \in S_0\}.$$

Пример. Узмимо $S_0 = \{1, 2, 5\}$. Тада имамо $S_1 = \{1, 3, 5, 6\}$ (објашњење: $1 \in S_1$ јер $0 \notin S_0$ и $1 \in S_0$; $2 \notin S_1$ јер истовремено $1 \in S_0$ и $2 \in S_0$; $3 \in S_1$ јер $2 \in S_0$ и $3 \notin S_0$ итд.). Још неколико наредних скупова су:

$$\begin{aligned} &S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}; \quad S_3 = \{1, 6, 7, 8\}; \quad S_4 = \{1, 2, 6, 9\};\\ &S_5 = \{1, 3, 6, 7, 9, 10\}; \quad S_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11\};\\ &S_7 = \{1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}; \quad S_8 = \{1, 2, 5, 9, 10, 13\}. \end{aligned}$$

Примећујемо да за S_8 важи

$$S_8 = \{1, 2, 5\} \cup \{9, 10, 13\} = S_0 \cup \{a + 8 : a \in S_0\},$$

па је једна од тражених вредности $N = 8$ (а потребно је наћи бесконачно много таквих).

Решење. Дефинишимо полиноме:

$$P_i(x) = \sum_{a \in S_i} x^a.$$

Тада важи:

$$P_n(x) \equiv (1 + x)P_{n-1}(x) \pmod 2. \tag{1}$$

Објаснимо ово. Приметимо, уколико $a \in S_{n-1}$, тада ће се моном x^a појављивати у полиному $P_{n-1}(x)$, па ће x^a бити међу сабирцима на десној страни горњег израза; слично, уколико $a - 1 \in S_{n-1}$, тада ће се моном x^{a-1} појављивати у полиному $P_{n-1}(x)$, а тада ће, после множења са $1 + x$, опет x^a бити међу сабирцима на десној страни (због $x^a = x \cdot x^{a-1}$). Дакле, ако је испуњено обоје $a \in S_{n-1}$ и $a - 1 \in S_{n-1}$, тада на десној страни имамо $2x^a$, уколико је испуњено тачно једно од тога двога, тада на десној страни имамо само једном x^a, а уколико није испуњено ниједно, тада на десној страни нема монома x^a. Свођењем по модулу 2, „нестаће“ сви мономи са коефицијентом 2, одакле закључујемо да ће моном x^a остати на десној страни по модулу 2 ако и само ако тачно један од бројева $a, a - 1$ припада скупу S_{n-1}, а то значи управо да добијамо полином $P_n(x)$.

Из (1) лако добијамо

$$P_n(x) \equiv (1 + x)P_{n-1}(x) \equiv (1 + x)^2 P_{n-2}(x) \equiv \cdots \equiv (1 + x)^n P_0(x) \pmod 2. \tag{2}$$

Да бисмо доказали тврђење задатка, довољно је да нађемо бесконачно много вредности N за које важи

$$P_N(x) = (1 + x^N)P_0(x) \quad \text{и} \quad N > \max S_0$$

(објашњење је слично објашњењу за (1); за разјашњење неопходности услова $N > \max S_0$, погледати пример наведен пре овог доказа, па установити зашто за $N = 4$ жељена конгруенција јесте испуњена, али и поред тога вредност $N = 4$ не испуњава услове из поставке задатка). Користећи (2), ово се своди на

$$(1+x)^N P_0(x) \equiv (1+x^N)P_0(x) \pmod 2$$

(нема потребе водити рачуна о услову $N > \max S_0$, будући да, уколико пронађемо бесконачно много таквих вредности N, јасно је да ће бесконачно много међу њима бити веће од $\max S_0$), а одатле коначно добијамо да тражимо вредности N за које важи

$$(1+x)^N \equiv 1 + x^N \pmod 2.$$

Тврдимо да ова релација важи за све N облика $N = 2^k$ (могуће и за још неке друге вредности, што није релевантно, будући да је циљ само пронаћи бесконачно много таквих вредности, није неопходно одредити *све* такве). Доказ спроводимо индукцијом по k.

За $k = 0$, тј. $N = 1$, са обе стране конгруенције имамо исти израз, па тврђење тривијално важи. Претпоставимо сада да тврђење важи за фиксирану вредност k, и докажимо да тада важи и за $k + 1$. Имамо:

$$\begin{aligned}(1+x)^{2^{k+1}} &= ((1+x)^{2^k})^2 \equiv (1+x^{2^k})^2 = 1 + 2x^{2^k} + x^{2^{k+1}} \\ &\equiv 1 + x^{2^{k+1}} \pmod 2\end{aligned}$$

(прва конгруенција важи на основу индуктивне хипотезе). Тиме је доказ завршен. □

Задатак 3. *Коначан низ целих бројева $a_0, a_1, a_2 \ldots$ називамо* p-балансираним *акко је вредност $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \cdots$ константна за $k = 0, 1, 2 \ldots$. Доказати: уколико је 50-члани низ p-балансиран за $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, онда су сви чланови тог низа једнаки 0.*

Решење. Дефинишимо полином

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49}.$$

Нека је ξ трећи корен јединице различит од 1. Тада имамо:

$$\begin{aligned}P(\xi) &= a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3 + a_4\xi + a_5\xi^2 + a_6 + \cdots \\ &= \underbrace{(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots)}_{c} + \xi\underbrace{(a_1 + a_4 + a_7 + \cdots)}_{c} + \xi^2\underbrace{(a_2 + a_5 + a_6 + \cdots)}_{c} \\ &= c(1 + \xi + \xi^2) = c\frac{\cancelto{0}{\xi^3 - 1}}{\xi - 1} = 0\end{aligned}$$

(користили смо претпоставку да је посматрани низ 3-балансиран, на основу чега смо констатовали да све заграде имају исту вредност, коју смо означили са c). На исти начин добијамо $P(\xi)=0$ кад год је ξ p-ти корен јединице различит од 1 за $p=5,7,11,13,17$. Пошто за све ове вредности p постоји $p-1$ таквих корена јединице, и сви су они различити међусобно, на овај начин смо пронашли укупно $2+4+6+10+12+16$, тј. 50 различитих нула полинома P. Међутим, полином P је степена не већег од 49, па како има 50 различитих нула, следи да је P нула-полином, тј. $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{49}=0$. $\square$

Задатак 4. *Дводимензионални низ рационалних бројева $f(n,i)$, где су n и i природни бројеви и $i \geqslant n$, дефинисан је рекурзивно на следећи начин:*

$$f(1,i)=\frac{1}{i};$$
$$f(n+1,i)=\frac{n+1}{i}\big(f(n,n)+f(n,n+1)+\cdots+f(n,i-1)\big). \tag{3}$$

Ако је p прост број, доказати да за $n>1$ именилац разломка $f(n,p)$ (у скраћеном облику) није дељив са p.

Решење. Дефинишимо

$$f_n(x)=f(n,n)x^n+f(n,n+1)x^{n+1}+f(n,n+2)x^{n+2}+\cdots.$$

Множећи $f_n(x)$ са $1+x+x^2+\cdots$ добијамо степени ред где је коефицијент уз x^{i-1} једнак $f(n,i-1)+f(n,i-2)+\cdots+f(n,n)$. Додатно множећи са $n+1$ добијамо степени ред где за коефицијент уз x^{i-1} примећујемо да је управо једнак изразу са десне стране (3), осим што нема i у имениоцу разломка; другим речима, посматрани коефицијент једнак је $if(n+1,i)$. Приметимо стога да је добијени степени ред управо први извод степеног реда $f_{n+1}(x)$, тј.:

$$f'_{n+1}(x)=(n+1)f_n(x)(1+x+x^2+\cdots). \tag{4}$$

Посматрајмо прво случај $n=1$:

$$f'_2(x)=2\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)\big(1+x+x^2+\cdots\big).$$

Приметимо да је $1+x+x^2+\cdots$ заправо први извод степеног реда $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$, па је десна страна горње релације заправо извод сложене функције, и интеграцијом обе стране добијамо

$$f_2(x)=\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^2$$

(из дефиниције $f_2(x)$ видимо да се на десној страни не појављује слободан члан, тј. интеграциона константа је једнака 0). Сада из (4) индукцијом директно следи

$$f_n(x)=\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^n.$$

Вредност $f(n,p)$ представља коефицијент уз x^p у горњем изразу. Приметимо да се тај коефицијент добија као збир рационалних бројева облика $\frac{a}{b}$ где је a природан број а b производ неких n бројева из скупа $\{1,2,\dots,p-n+1\}$ (наиме, из сваке од n заграда бирамо неко $\frac{x^i}{i}$ за $i \geqslant 1$, при чему збир свих одабраних експонената за x треба да износи тачно p; следи да за свако такво i мора важити $i \leqslant p-n+1$, будући да би у супротном њихов збир био већи од p). Дакле, именилац разломка добијеног на крају биће неки делилац броја $((p-n+1)!)^n$, што очигледно није дељиво са p. $\square$